



TITLE:

無限次元空間上の確率測度に関連
する再生核ヒルベルト空間の役割：
連続時間ガウス型通信路への応用
をにらんで (再生核の理論とその応用)

AUTHOR(S):

柳, 研二郎

CITATION:

柳, 研二郎. 無限次元空間上の確率測度に関連する再生核ヒルベルト空間の役割：連続時間ガウス型通信路への応用をにらんで (再生核の理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1998, 1067: 108-117

ISSUE DATE:

1998-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62496>

RIGHT:

無限次元空間上の確率測度に関連する 再生核ヒルベルト空間の役割 -連続時間ガウス型通信路への応用をにらんで-

Kenjiro Yanagi (Yamaguchi University)

柳 研二郎 (山口大・工)

1 はじめに

通信における数学的理論は1948年シャノンによって創設され、以来半世紀にわたって情報理論という学問としての1分野を形成しかつ周辺分野と深い関係を持ちながら発展してきた。今日ではさらに広領域の分野を含む学問領域に位置する新しい分野を形成している。また情報革命とまでいわれるインターネット等、コンピュータの高性能、小型化によって新しい社会基盤が世界的に構築されようとしている。このような背景の中で従来の数学分野に新しい情報分野を取り込んだ形で大学等の教育研究機関の組織が改革されつつある。例えば数学科が数理科学科又は数理情報科学科に、大学院が数理科学研究科にという具合にである。ところが組織を変えても当面は中にいるスタッフが同じ面々であるので、ただ看板だけを変えたという認識でしかないのが現状である。そこで意識革命が必要となってくる。旧態然とした「純粋数学重視・応用数学軽視」という時代遅れの認識がある限りは、かえって世の中の流れに逆行する危険をはらんでいるということを肝に銘じてほしい。そこで数学、特に函数解析学に情報理論がどのように取り込めるかという1つの方向づけ、あるいはヒントを与えるものとしてこの報告をする。情報理論の中で中心的な概念の1つに通信路がある。通信路の数学的構成は一般の確率測度空間を用いてある程度完成しているといえるが(国澤・梅垣 [6], 梅垣 [9])細かい議論に関しては未解決問題が多数残っている。この報告では入力空間および出力空間が無限次元空間の場合を想定し特にガウス型の通信路の構成を行う。なぜ無限次元空間かといえば、入力信号として連続時間確率過程を考えれば当然そのパス空間は無限次元空間となるからである。その上の確率測度が入力信号の分布の役割を演ずる。

まず第2章では無限次元空間の中でも最もポピュラーな Banach 空間上の確率測度についてのよく知られた結果を述べる. 第3章では無限次元空間上の確率測度と密接な関連をもつ再生核ヒルベルト空間について述べる. 第4章では相互情報量が具体的な計算式で与えられることを示す. 最後に第5章ではガウス型通信路を定義しその容量について言及する.

2 Banach 空間上の確率測度

X を実可分 Banach 空間, X^* をその共役空間とする. $B(X)$ を X の Borel σ -集合体とする. X^* の有限次元部分空間 F に対して F に基づいた柱状集合 (cylinder set) C は次のように定義される.

$$C = \{x \in X; (\langle x, f_1 \rangle, \langle x, f_2 \rangle, \dots, \langle x, f_n \rangle) \in D\}$$

ただし $n \geq 1$, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset F$, $D \in B(\mathbb{R}^n)$ である. F に基づいた柱状集合全体を \mathcal{C}_F とし,

$$\mathcal{C}(X, X^*) = \bigcup \{\mathcal{C}_F; F \text{ は } X^* \text{ の有限次元部分空間}\}$$

とすると $\mathcal{C}(X, X^*)$ は集合体となる. $\hat{\mathcal{C}}(X, X^*)$ を $\mathcal{C}(X, X^*)$ によって生成される σ -集合体とすると $\hat{\mathcal{C}}(X, X^*) = B(X)$ が成り立つ. μ を $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ を満たす $(X, B(X))$ 上の確率測度とすると, 次のような vector $m \in X$ と operator $R: X^* \rightarrow X$ が存在することがわかる. つまり任意の $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ に対して

$$\langle m, x^* \rangle = \int_X \langle x, x^* \rangle d\mu(x),$$

$$\langle Rx^*, y^* \rangle = \int_X \langle x - m, x^* \rangle \langle x - m, y^* \rangle d\mu(x)$$

である. この m を μ の平均ベクトル (mean vector) という. R は有界線型作用素であり, μ の共分散作用素 (covariance operator) という. さらにこの R は対称 (symmetric) であり, つまり

$$\text{任意の } x^*, y^* \in X^* \text{ に対して } \langle Rx^*, y^* \rangle = \langle Ry^*, x^* \rangle$$

また正定値 (positive) でもある. つまり

$$\text{任意の } x^* \in X^* \text{ に対して } \langle Rx^*, x^* \rangle \geq 0$$

任意の $f \in X^*$ に対して $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ が \mathbb{R} 上のガウス測度となるときの μ を $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のガウス測度という. ガウス測度 μ の特性関数 $\hat{\mu}(f)$ は次のように表される. 任意の $f \in X^*$ に対して

$$\hat{\mu}(f) = \exp\{i \langle m, f \rangle - \frac{1}{2} \langle Rf, f \rangle\} \quad (1)$$

ただし $m \in X$ は μ の平均ベクトル, $R: X^* \rightarrow X$ は μ の共分散作用素である. 逆に $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の確率測度 μ の特性関数が (1) の形をしていれば μ はガウス測度となり $m \in X$ はその平均ベクトル, $R: X^* \rightarrow X$ はその共分散作用素となっている. したがって $\mu = [m, R]$ と書いて μ は平均ベクトル m , 共分散作用素 R をもつ $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のガウス測度を表すことにする.

3 再生核ヒルベルト空間

任意に symmetric positive operator $R: X^* \rightarrow X$ が与えられると X のヒルベルト (Hilbert) 部分空間 H と H から X への連続な埋め込み j が存在して $R = jj^*$ となる. この H を R の再生核ヒルベルト空間 (reproducing kernel Hilbert space) という. なぜこのような名前がつけられることが可能かという理由をこの章で述べることにする. 分解定理を示すために、次の補題を用意する.

Lemma 1 $R: X^* \rightarrow X$ を正の対称作用素とするととき、ヒルベルト空間 \mathcal{H} と $Q \in \mathcal{B}(X^*, \mathcal{H})$ が存在して次が成立する.

$$R = Q^*Q, \quad \overline{QX^*} = \mathcal{H}, \quad Q^*\mathcal{H} = X.$$

Proof. $\mathcal{N} = \{x^* \in X^* : \langle Rx^*, x^* \rangle = 0\}$ とおく. X^* 上の双線型汎関数 $(x^*, y^*) \rightarrow \langle Rx^*, y^* \rangle$ が正定値であるから, \mathcal{N} は X^* の閉部分空間となる. 商空間 X^*/\mathcal{N} において内積を

$$\langle x^* + \mathcal{N}, y^* + \mathcal{N} \rangle = \langle Rx^*, y^* \rangle, \quad x^*, y^* \in X^*$$

と定義することができる. 内積空間 X^*/\mathcal{N} の完備化ヒルベルト空間を \mathcal{H} とし, $Q: X^* \rightarrow \mathcal{H}$ を商写像 $Qx^* = x^* + \mathcal{N}$ とする. 任意の $x^*, y^* \in X^*$ に対して $\langle Qx^*, Qy^* \rangle = \langle Rx^*, y^* \rangle$ だから, $Q \in \mathcal{B}(X^*, \mathcal{H})$ であり $Q^*Q = R$. また $\overline{QX^*} = \mathcal{H}$ は明らか. さらに, $Q^*(QX^*) = RX^* \subset X$ だから

$$Q^*\mathcal{H} = Q^*(\overline{QX^*}) \subset \overline{Q^*(QX^*)} \subset X.$$

□

Theorem 1 $R: X^* \rightarrow X$ を正の対称作用素とする. このとき, X のヒルベルト部分空間 \mathcal{H}_R で, 埋め込み $j_R: \mathcal{H}_R \rightarrow X$ が $R = j_R j_R^*$ を満たすものが一意的に存在する.

Proof. Lemma 1 より, ヒルベルト空間 \mathcal{H} と $Q \in \mathcal{B}(X^*, \mathcal{H})$ が存在して $R = Q^*Q$, $\overline{QX^*} = \mathcal{H}$, かつ $Q^*\mathcal{H} \subset X$ が成立する. いま, $v \in \mathcal{H}$, $Q^*v = 0$ とすると, $\langle v, Qx^* \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Q^*v, x^* \rangle = 0$ ($x^* \in X^*$). $\overline{QX^*} = \mathcal{H}$ より $v = 0$. ゆえに Q^* は単射である. そこで $\mathcal{H}_R = Q^*\mathcal{H} (\subset X)$ として, \mathcal{H}_R の内積を

$$\langle Q^*v, Q^*w \rangle_{\mathcal{H}} = \langle v, w \rangle_{\mathcal{H}}, \quad v, w \in \mathcal{H}$$

と定義すると, \mathcal{H}_R は \mathcal{H} と同型なヒルベルト空間となる. 実際, $Uv = Q^*v$ ($v \in \mathcal{H}$) により, ユニタリ作用素 $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_R$ が定まる. このとき, $Q^* = j_R U$ だから

$$R = Q^*Q = j_R U U^* j_R^* = j_R j_R^*.$$

次に一意性を示す. \mathcal{K} を X のヒルベルト部分空間として, 埋め込み $j: \mathcal{K} \rightarrow X$ が $R = j j^*$ を満たすとする. このとき, $j^*X^* \subset \mathcal{K}$ であり, X の線型部分空間として $j^*X^* = j(j^*X^*) = RX^*$. $v \in \mathcal{K}$ について, $v \in (j^*X^*)^\perp$ とすると, $\langle jv, x^* \rangle = \langle v, j^*x^* \rangle_{\mathcal{K}} = 0$ ($x^* \in X^*$). よって $jv = 0$ となり $v = 0$. これより $RX^* = j^*X^*$ は \mathcal{K} で稠密. 任意の $x^*, y^* \in X^*$ に対して

$$\langle Rx^*, Ry^* \rangle_{\mathcal{K}} = \langle j^*x^*, j^*y^* \rangle_{\mathcal{K}} = \langle j j^*x^*, y^* \rangle = \langle Rx^*, y^* \rangle.$$

ゆえに \mathcal{K} は R だけで一意的に定まる. □

次に再生核ヒルベルト空間についての基本的定理を述べる.

Theorem 2 (N. Aronszajn [1]) Λ を任意の集合とする. $k: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ を *positive deninite kernel* とする. このとき次の条件 (a), (b), (c) を満たすヒルベルト空間が一意的に存在する.

- (a) $\mathcal{H}(k)$ は Λ 上の実数値関数の集合,
- (b) $\{k_\lambda: \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{H}(k)$, ただし $k_\lambda \equiv k(\lambda, t)$,
- (c) 任意の $\lambda \in \Lambda$ と任意の $\phi \in \mathcal{H}(k)$ に対して $(\phi, k_\lambda)_{\mathcal{H}(k)} = \phi(\lambda)$.

この $\mathcal{H}(k)$ を k の再生核ヒルベルト空間 (*reproducing kernel Hilbert space*) 略して *RKHS* という.

Proof. $\mathcal{H}_0 \equiv \text{linear span of } \{k_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ とおき, \mathcal{H}_0 上の bilinear form を次のように定義する.

$$\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_{\lambda_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^m \beta_j k_{t_j}, \quad (\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, \lambda_i, t_j \in \Lambda)$$

に対して

$$s(\phi, \psi) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j k(\lambda_i, t_j)$$

このとき s は well defined, symmetric positive である. 特に $s(\phi, k_\lambda) = \phi(\lambda)$, $\phi \in \mathcal{H}_0$, $\lambda \in \Lambda$.

さらに $s(\phi, \psi) = 0 \Rightarrow \phi = 0$. したがって $(\phi, \psi) \equiv s(\phi, \psi)$, $\phi, \psi \in \mathcal{H}_0$ とすると (\cdot, \cdot) は \mathcal{H}_0 上の内積になる. ここで $\mathcal{H} \equiv \overline{\mathcal{H}_0}^{(\cdot, \cdot)}$ を \mathcal{H}_0 の完備化とし, さらに

$$\mathcal{H}(k) \equiv \{\phi : \phi : \Lambda \rightarrow \mathcal{R}, \exists_1 h \in \mathcal{H} \text{ s.t. } \phi(\lambda) = (h, k_\lambda)_\mathcal{H}\}$$

とすると, $\phi_1(\lambda) = (h_1, k_\lambda)_\mathcal{H}$, $\phi_2(\lambda) = (h_2, k_\lambda)_\mathcal{H}$ に対して

$$(\phi_1, \phi_2)_{\mathcal{H}(k)} \equiv (h_1, h_2)_\mathcal{H}.$$

よって $\mathcal{H}(k)$ 上の内積 $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}(k)}$ が定義される. well defined 性は $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ が稠密であることから導かれる. $\mathcal{H}(k)$ はヒルベルト空間である. また $k_\lambda \in \mathcal{H}(k)$, $\phi \in \mathcal{H}(k)$ に対して

$$(\phi, k_\lambda)_{\mathcal{H}(k)} = (h, k_\lambda)_\mathcal{H} = \phi(\lambda).$$

また一意性は明らか. □

Theorem 3 $k_R(x^*, y^*) = \langle Rx^*, y^* \rangle$ とおくと k_R は $X^* \times Y^*$ 上の positive definite kernel である. このとき $\mathcal{H}(k_R) \cong \mathcal{H}_R$ が成り立つ.

Proof. $\mathcal{H}(k_R) \ni \phi : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ かつ k_R は continuous bilinear form だから $\mathcal{H}(k_R) \subset X^{**}$. さらに $k_R(x^*, \cdot) = \langle Rx^*, \cdot \rangle$ だから $\mathcal{H}(k_R) \subset X$. Lemma 1 と Theorem 1, 2 より $x^* \in X^*$ に対して

$$\|k_R(x^*, \cdot)\|_{\mathcal{H}(k_R)}^2 = k_R(x^*, x^*) = \langle Rx^*, x^* \rangle = \|Rx^*\|_{\mathcal{H}_R}^2.$$

よって $\phi : \{k_R(x^*, \cdot); x^* \in X^*\} \rightarrow R(X^*)$ は onto, isometric である. また $\overline{\{k_R(x^*, \cdot); x^* \in X^*\}} = \mathcal{H}(k_R)$ かつ $\overline{R(X^*)} = \mathcal{H}_R$ だから ϕ は $\tilde{\phi} : \mathcal{H}(k_R) \rightarrow \mathcal{H}_R$ が onto, isometric になるように拡張できる. よって $\mathcal{H}(k_R) \cong \mathcal{H}_R$. □

4 相互情報量

まず相互情報量を定義するために2つの実可分バナッハ空間 X, Y を用意する.
 μ_X, μ_Y をそれぞれ $(X, \mathcal{B}(X)), (Y, \mathcal{B}(Y))$ 上の確率測度, μ_{XY} を μ_X, μ_Y をそれぞれ
 周辺分布にもつような $(X \times Y, \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y))$ 上の結合確率測度とする. つまり

$$\text{任意の } A \in \mathcal{B}(X) \text{ に対して } \mu_X(A) = \mu_{XY}(A \times Y)$$

$$\text{任意の } B \in \mathcal{B}(Y) \text{ に対して } \mu_Y(B) = \mu_{XY}(X \times B)$$

が満たされる. さらに

$$\int_X \|x\|^2 d\mu_X(x) < \infty, \quad \int_Y \|y\|^2 d\mu_Y(y) < \infty$$

を仮定すると $m = (m_1, m_2) \in X \times Y$ が存在して次を満たす.

任意の $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ に対して

$$\langle (m_1, m_2), (x^*, y^*) \rangle = \int_{X \times Y} \langle (x, y), (x^*, y^*) \rangle d\mu_{XY}(x, y)$$

ただし m_1, m_2 はそれぞれ μ_X, μ_Y の平均ベクトルである. また

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} : X^* \times Y^* \rightarrow X \times Y$$

が存在して次を満たす.

任意の $(x^*, y^*), (z^*, w^*) \in X^* \times Y^*$ に対して

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^* \\ w^* \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_{X \times Y} \langle (x, y) - m, (x^*, y^*) \rangle \langle (x, y) - m, (z^*, w^*) \rangle d\mu_{XY}(x, y) \end{aligned}$$

ただし $R_{11} : X^* \rightarrow X$ は μ_X の共分散作用素, $R_{22} : Y^* \rightarrow Y$ は μ_Y の共分散作用素
 である. $R_{12} = R_{21}^* : Y^* \rightarrow X$ は次によって定義される.

任意の $(x^*, y^*) \in Y^* \times X^*$ に対して

$$\langle R_{12}y^*, x^* \rangle = \int_{X \times Y} \langle x - m_1, x^* \rangle \langle y - m_2, y^* \rangle d\mu_{XY}(x, y)$$

この R_{12} は μ_{XY} の交差共分散作用素 (cross covariance operator) という.

$\mu_{XY} = \left[(0, 0) \quad \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \right]$ とすると $\mu_X = [0, R_X]$, $\mu_Y = [0, R_Y]$ となる. ま

た R_X の再生核ヒルベルト空間 $H_X \subset X$ と R_Y の再生核ヒルベルト空間 $H_Y \subset Y$, さらに H_X から X への連続な埋め込み j_X と H_Y から Y への連続な埋め込み j_Y が存在し $R_X = j_X j_X^*$, $R_Y = j_Y j_Y^*$ となる.

ここでさらに再生核ヒルベルト空間 H_X が X で稠密, H_Y が Y で稠密と仮定すると有界線型作用素 $V_{XY} : H_Y \rightarrow H_X$ が存在して

$$R_{XY} = j_X V_{XY} j_Y, \quad \|V_{XY}\| \leq 1$$

を満たすようにできる. したがって次のような定理にまとめられる.

Theorem 4 $\mu_{XY} \sim \mu_X \otimes \mu_Y$ であるための必要十分条件は V_{XY} がヒルベルト・シュミット型 (Hilbert-Schmidt type) で $\|V_{XY}\| < 1$ である.

情報理論で特に重要な役割を演ずる μ_{XY} の相互情報量 $I(\mu_{XY})$ は次のように定義される.

$$\mathcal{F} = \{(\{A_j\}, \{B_j\}); \{A_j\} \text{ は } \mu_X(A_j) > 0 \text{ となる } X \text{ の有限可測分割, } \{B_j\} \text{ は } \mu_Y(B_j) > 0 \text{ となる } Y \text{ の有限可測分割}\}$$

とすると

$$I(\mu_{XY}) = \sup \sum_{i,j} \mu_{XY}(A_i \times B_j) \log \frac{\mu_{XY}(A_i \times B_j)}{\mu_X(A_i) \mu_Y(B_j)}$$

である. ただし上限はすべての $(\{A_i\}, \{B_j\}) \in \mathcal{F}$ についてとる.

この相互情報量は次のように表される.

$\mu_{XY} \ll \mu_X \otimes \mu_Y$ のとき

$$I(\mu_{XY}) = \int_{X \times Y} \log \frac{d\mu_{XY}}{d\mu_X \otimes \mu_Y}(x, y) d\mu_{XY}(x, y)$$

その他のとき $I(\mu_{XY}) = \infty$ とする.

次にこの相互情報量が具体的な計算式で表現されることを述べるが, その前に必要な事項を証明なしで挙げることにする.

X を実可分 Banach 空間, $\mu_X = [0, R_X]$, H_X を R_X の再生核ヒルベルト空間とする. $L_X \equiv \overline{X^*}^{\|\cdot\|_2^X}$ を $L_2(X, \mathcal{B}(X), \mu_X)$ のノルムによる完備化とすると, L_X は内積

$$\langle f, g \rangle_{L_X} = \int_X \langle x, f \rangle \langle x, g \rangle d\mu_X(x)$$

をもつ Hilbert 空間である. $j_X : H_X \rightarrow H_X$ を埋め込みとすると, $U_X f = j_X^* f$, $f \in X^*$ となる unitary operator $U_X : L_X \rightarrow H_X$ が存在する. ここで Radon-Nykodym 導関数についての基本的な結果を述べる.

Lemma 2 (Pan [7]) X を実可分 Banach 空間, $\mu_X = [0, R_X], \mu_Y = [m, R_Y]$ とする. このとき $\mu_X \sim \mu_Y$ となるための必要十分条件は次の (1), (2), (3) が成り立つことである.

$$(1) H_X = H_Y,$$

$$(2) m \in H_X,$$

$$(3) JJ^* - I_X: \text{Hilbert-Schmidt operator},$$

ただし, H_X, H_Y はそれぞれ R_X, R_Y の RKHS, $J: H_Y \rightarrow H_X$ は continuous injection, $I_X: H_X \rightarrow H_X$ は identity operator である.

また (1), (2), (3) が成立し, かつ $\{\lambda_n\}$ を 1 でない JJ^* の固有値, $\{v_n\}$ を $\{\lambda_n\}$ に対する正規化された固有ベクトルとすると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_Y}{\mu_X}(x) &= \exp\{U_X^{-1}[(JJ^*)^{-1/2}m](x) - \frac{1}{2} \langle m, (JJ^*)^{-1}m \rangle_{H_X} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(U_X^{-1}v_n)^2(x) (\frac{1}{\lambda_n} - 1) + \log \lambda_n]\}, \end{aligned}$$

ただし, $U_X: L_X \rightarrow H_X$ は unitary operator.

それから (1), (2), (3) の少なくとも 1 つが不成立であれば $\mu_X \perp \mu_Y$ となる.

Lemma 3 $R_X: X^* \rightarrow X, R_Y: Y^* \rightarrow Y$ とする.

$$\mathcal{R}_{X \otimes Y} \equiv \begin{pmatrix} R_X & 0 \\ 0 & R_Y \end{pmatrix}$$

とおくと $\mathcal{R}_{X \otimes Y}: X^* \times Y^* \rightarrow X \times Y$ は symmetric, positive である. さらに $H_X, H_Y, H_{X \times Y}$ をそれぞれ $R_X, R_Y, \mathcal{R}_{X \times Y}$ の RKHS とすると $H_{X \times Y} \cong H_X \times H_Y$ が成り立つ.

以上の事項より次の結果を得る.

Theorem 5 $\mu_{XY} \sim \mu_X \otimes \mu_Y$ のとき $I(\mu_{XY}) < \infty$ で

$$I(\mu_{XY}) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \gamma_n)$$

と表される. ただし $\{\gamma_n\}$ は $V_{XY}^* V_{XY}$ の固有値である.

5 ガウス型通信路への応用

いよいよフィードバックをもたないガウス型通信路を定義することができる。
 X を入力空間を表す実可分バナッハ空間, Y を出力空間を表す実可分バナッハ空間とする. $\lambda: X \times \mathcal{B}(Y) \rightarrow [0, 1]$ は次の (1), (2) を満たすとする.

- (1) 任意の $x \in X$ に対して $\lambda(x, \cdot) = \lambda_x$ は $(Y, \mathcal{B}(Y))$ 上のガウス測度である
- (2) 任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ に対して $\lambda(\cdot, B)$ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のボレル可測函数である.

このとき 3 つ組 $[X, \lambda, Y]$ をガウス型通信路という.

入力情報源 μ_X を与えるとそれに対応して出力情報源 μ_Y 及び複合情報源 μ_{XY} がそれぞれ次のように定義される.

任意の $B \in \mathcal{B}(Y)$ に対して

$$\mu_Y(B) = \int_X \lambda(x, B) d\mu_X(x),$$

任意の $C \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ に対して

$$\mu_{XY}(C) = \int_X \lambda(x, C_x) d\mu_X(x)$$

ただし $C_x = \{y \in Y; (x, y) \in C\}$ である.

通信路の容量とはある制約条件を満たす入力情報源 μ_X に対して相互情報量 $I(\mu_{XY})$ の上限である. 容量の重要性はシャノンの第 2 符号化定理から保証されているのでただ単なる数学の遊びではないことに注意しておく.

簡単のため $X = Y$ で $\lambda(x, B) = \mu_Z(B - x)$, $\mu_Z = [0, R_Z]$ とする. つまり入力空間と出力空間は同じで雑音にあたるガウス測度 μ_Z が加法的に加わる通信路である.

制限として $\int_X \|x\|_Z^2 d\mu_X(x) \leq P$ を与えると, その容量は $\frac{P}{2}$ であることが示される.

また μ_W を別のガウス測度としたとき制限として $\int_X \|x\|_W^2 d\mu_X(x) \leq P$ を与えたとき, この通信路は不適合ガウス型通信路といいその容量は Baker [2] により精密に得られている. また通信路にフィードバックをつけた場合の容量についても述べたいが, この報告の主旨から逸脱するので他の機会に述べることにする.

参考文献

- [1] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels", Trans. Amer. Math. Soc., Vol 68, pp 337-404, 1950.

- [2] C. R. Baker, "Capacity of the mismatched Gaussian channel", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-33, pp 802-812, 1987.
- [3] R. G. Gallager, Information theory and reliable communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [4] 日合文雄、柳研二郎, ヒルベルト空間と線型作用素, 牧野書店, 1995.
- [5] S. Ihara, Information theory for continuous systems, World Scientific, 1993.
- [6] 国澤清典、梅垣壽春, 情報理論の進歩, 岩波書店, 1965.
- [7] Y. M. Pan, "Simple proofs of equivalence conditions for measures induced by Gaussian processes", Selected Transl. Math. Stat. Prob., Vol 12, pp 109-118, 1973.
- [8] R. Schatten, Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1960.
- [9] 梅垣壽春, 情報数理解の基礎, サイエンス社, 1993.
- [10] N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze and S. A. Chobanyan, Probability distribution on Banach spaces, D.Reidel Publishing Company, 1987.
- [11] K. Yanagi, "ガウス型通信路の最近の問題について", 京都大学数理解析研究所講究録, Vol 975, pp 1-13, 1997.
- [12] K. Yanagi, "フィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路について", 京都大学数理解析研究所講究録, Vol 980, pp 150-161, 1997.

755-8611

山口県宇部市常盤台 2 5 5 7

山口大学工学部共通講座

TEL:0836-35-9966 (研究室)

TEL:0836-35-9105 (共通講座事務室)

FAX:0836-35-9492

e-mail:yanagi@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp